

# 1 Herleitung Wegmessung

## 1.1 Referenzzustand

Zunächst wird der Spiegelwinkel  $\alpha_0$  im Referenzzustand (Durchbiegung Null) berechnet. Aus der Zeichnung entnimmt man die Zusammenhänge

$$\tan \beta_0 = \frac{H_0}{D} \quad (1.1)$$

$$\beta_0 = 180^\circ - 2\alpha_0 \quad (1.2)$$

Setzt man 1.2 in 1.1 ein, erhält man:

$$\Rightarrow \tan(180^\circ - 2\alpha_0) = \frac{H_0}{D} \quad (1.3)$$

Auflösen nach  $\alpha_0$  liefert:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \tan(-2\alpha_0) &= \frac{H_0}{D} \\ \Rightarrow \alpha_0 &= -\frac{1}{2} \arctan \frac{H_0}{D} \end{aligned} \quad (1.4)$$

## 1.2 Probendurchbiegung

Wenn die Probe durchgebogen wird, bewegt sich die Messspitze **A** nach unten, und der Spiegel dreht sich um den Winkel  $\Delta\alpha$ , wobei

$$\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha \quad (1.5)$$

Analog zu 1.4 gilt:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \arctan \frac{H}{D} \quad (1.6)$$

Nun muss der Zusammenhang zwischen der Spiegeldrehung  $\Delta\alpha$  und der Probendurchbiegung  $y$  berechnet werden. Es ist:

$$\Delta\alpha = \gamma + \delta \quad (1.7)$$

Für  $\delta$  und  $\gamma$  ergibt sich:

$$\tan \delta = \frac{l}{L} \quad (1.8)$$

$$\sin \gamma = \frac{y - l}{\sqrt{L^2 + l^2}} \quad (1.9)$$

Somit kann  $\delta$  aus

$$\delta = \arctan \frac{l}{L} \quad (1.10)$$

direkt berechnet werden. Aus 1.7 und 1.5 erhält man für  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_0 - \delta - \alpha \\ \Rightarrow \sin \gamma &= \sin(\alpha_0 - \delta - \alpha) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Und mit 1.6, 1.8 und 1.9 erhält man als Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{y-l}{\sqrt{L^2+l^2}} &= \sin\left(\left(\alpha_0 - \delta\right) + \frac{1}{2} \arctan \frac{H}{D}\right) \\ \Leftrightarrow y &= l + \sqrt{L^2+l^2} \cdot \sin\left(\left(\alpha_0 - \delta\right) + \frac{1}{2} \arctan \frac{H}{D}\right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Hierbei sind  $D$ ,  $L$ ,  $l$  und  $(\alpha_0 - \delta)$  Konstanten.

## 1.3 Horizontalbewegung der Messspitze

### 1.3.1 Allgemeiner Zusammenhang

Bei einer Durchbiegung der Probe um  $y$  bewegt sich die Messspitze **A** nicht nur vertikal, sondern auch horizontal. Dabei darf es nicht passieren, dass der Kontakt zwischen Messspitze und Probe verloren geht. Hat die Probe also eine Breite von z. B. 5 mm, so darf sich der Punkt **A** theoretisch maximal um 2.5 mm nach rechts oder links bewegen. In der Praxis kann es jedoch vorkommen, dass die Probenbreite etwas kleiner ist, die Probe außermittig liegt, oder der Randbereich der Probe nicht exakt eben ist. Der Satz des Pythagoras liefert:

$$\begin{aligned} (L-x)^2 + (y-l)^2 &= L^2 + l^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2Lx + y^2 - 2yl &= 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= L \pm \sqrt{L^2 - y^2 + 2yl} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Man erhält zwei Lösungen. Um die richtige Lösung zu finden, fehlt noch eine Randbedingung: Im Referenzzustand (= keine Probendurchbiegung, d.h.  $y = 0$ ) muss  $x = 0$  gelten. Somit erhält man als Lösung

$$x = L - \sqrt{L^2 - y^2 + 2yl} =: f(y) \quad (1.14)$$

### 1.3.2 Optimierung

Wie sind  $L$  und  $l$  zu wählen, wenn der Messbereich der KomBiVic (= Die maximal zulässige Durchbiegung der Probe) mit  $y_{\max}$  gegeben ist? Die Horizontalauslenkung bei maximaler Durchbiegung ist  $f(y_{\max})$ . Dies ist die maximale horizontale Auslenkung in

die positive x-Achsen-Richtung. Die maximale horizontale Auslenkung in die negative x-Achsen-Richtung  $x_{\max}$  erhält man wie folgt:

$$\frac{d}{dx} f(y) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow \frac{l-y}{\sqrt{L^2 - y^2 + 2yl}} = 0 \quad (1.16)$$

$$\Leftrightarrow l-y = 0 \quad (1.17)$$

$$\Leftrightarrow y = l \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow x_{\max} = f(l) = L - \sqrt{L^2 - l^2 + 2l^2} \quad (1.19)$$

$$\Leftrightarrow x_{\max} = L - \sqrt{L^2 + l^2} \quad (1.20)$$

Da  $x_{\max}$  eine Auslenkung nach links bezeichnet, ist  $x_{\max}$  negativ. Um nun zu gewährleisten, dass die maximale Auslenkung innerhalb des Intervalls  $[-b; +b]$  bleibt, muss gelten:

$$\begin{cases} x_{\max} \geq -b \\ f(y_{\max}) \leq b \end{cases} \quad (1.21)$$

Das heißt:

$$\begin{cases} L - \sqrt{L^2 + l^2} \geq -b \\ L - \sqrt{L^2 - y_{\max}^2 + 2y_{\max}l} \leq b \end{cases} \quad (1.22)$$

Die beiden Gleichungen erfüllt man am einfachsten, indem man  $L$  ausreichend groß wählt. Andererseits sollte  $L$  möglichst klein sein, damit die Hebelwirkung (= Spiegeldrehung bei Probendurchbiegung, siehe 1.9) möglichst groß ist.